

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 535.42; 517.9
ББК 22.311

А. В. БОРОВСКИЙ
*доктор физико-математических наук, профессор,
Байкальский государственный университет экономики и права*

А. Л. ГАЛКИН
*доктор физико-математических наук,
Институт общей физики РАН им. А. М. Прохорова*

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ ТН ВОЛНЫ НА ПРЯМОУГОЛЬНОМ КЛИНЕ

Рассмотрена задача строгой дифракции на прямоугольном идеально-проводящем клине (ступеньке) электромагнитной волны, обладающей ТН поляризацией. Исследовано строгое решение уравнения Гельмгольца для указанной задачи для случая, когда падающая волна имеет одно отражение от горизонтальной поверхности клина. Вычислена интенсивность дифрагировавшей электромагнитной волны. Показано, что появление в задаче вертикальной стенки ослабляет дифракцию при углах падения исходной ТН волны, близких к прямому, из-за сосредоточения электромагнитного поля в области тени вблизи от вертикальной стенки.

Ключевые слова: строгая теория дифракции; численное моделирование дифракции на прямоугольном клине.

A. V. BOROVSKY
*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Baikal State University of Economics and Law*

A. L. GALKIN
*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
General Physics Institute of RAS n.a. A. M. Prokhorov*

NUMERICAL SIMULATION OF TM-WAVE DIFFRACTION ON RIGHT-ANGLED WEDGE

The article deals with the problem of rigorous diffraction on a perfectly conducting rectangular wedge (step) of electromagnetic waves with TM-polarization. The authors study the exact solution to the Helmholtz equation for this problem for this problem in case when the incident wave has one reflection on horizontal surface of the wedge and calculate the intensity of the diffracting electromagnetic wave. It is shown that a vertical wall decreases the diffraction in the angle of incidence close to the vertical of the original TM-wave due to the concentration of electromagnetic field in the shadow zone near the vertical wall.

Keywords: rigorous diffraction theory; numerical simulation of diffraction on right-angled wedge.

Задачи дифракции электромагнитных волн на металлических препятствиях вызывают повышенный интерес по причине своего фундаментального характера и несомненной практической направленности. Теория дифракции

заложена в трудах Г. Кирхгофа [11] и А. Зоммерфельда [8; 12]. Впоследствии задачами дифракции занимались Ф. Франк и Р. Мизес [10], М. Борн и Э. Вольф [1], Г. Гринберг [7], П. Я. Уфимцев [10] и другие авторы. В дан-

Вычисление интенсивности для электромагнитных TE и TH волны произведено, например, в [4; 6]. Показано, что в обоих случаях выражения для интенсивности совпадают и даются формулой

$$I = |S| = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} \left[\operatorname{Re}U \frac{\partial \operatorname{Im}U}{\partial \varphi} - \operatorname{Im}U \frac{\partial \operatorname{Re}U}{\partial \varphi} \right]^2 + \left[\operatorname{Re}U \frac{\partial \operatorname{Im}U}{\partial \rho} - \operatorname{Im}U \frac{\partial \operatorname{Re}U}{\partial \rho} \right]^2} \quad (3)$$

Решение задачи строгой дифракции плоской TH волны на идеально проводящем прямоугольном клине ($\delta = \pi/2$) можно представить в следующем виде:

$$U(\rho, \varphi, \gamma) = [U_3^c(\rho, \varphi - \gamma) + U_3^c(\rho, \varphi + \gamma)]_1 + [U_3^c(\rho, 3\pi + (\varphi - \gamma)) + U_3^c(\rho, 3\pi + (\varphi + \gamma))]_2, \quad (4)$$

где $U_3^c(\rho, \theta)$ — дифракционный интеграл Зоммерфельда-Франка-Мизеса (ЗФМ) с периодом 6π

$$U_3^c(\rho, \theta) = \exp(i\rho \cos\theta) \frac{1}{3} \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) \times \cos\left(\frac{2}{3}\theta\right) \int_0^\rho \exp(-i\xi \cos\theta) H_{1/3}^{(2)}(\xi) d\xi + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cos\left(\frac{1}{3}\theta\right) \int_0^\rho \exp(-i\xi \cos\theta) H_{2/3}^{(2)}(\xi) d\xi \right]. \quad (5)$$

Подробности теории дифракционного интеграла ЗФМ с произвольным периодом представлены в работах [2; 3], там же можно найти вывод формулы (5) для прямоугольного клина.

Покажем, что для решения (5) выполняется условие обращения в нуль производных (2) на верхней и нижней гранях клина. Для этого проще всего использовать эквивалентное представление для дифракционного интеграла [3]

$$U_p^c(\rho, \theta) = \frac{1}{\rho} J_0(\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\rho} \exp\left(i \frac{k\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{k}{\rho}\theta\right) J_{k/p}(\rho), \quad (6)$$

где p — произвольное действительное число, большее нуля. Применительно к случаю прямоугольного клина $p = 3$. В формуле (6) $J_{k/p}(\rho)$ — функция Бесселя с дробно-рациональным индексом в случае целых p и действительным индексом в случае действительных p . Убедиться в эквивалентности формул (5) и (6) непосредственно, когда

$p = 3$, довольно сложно. Доказательство эквивалентности проведено в [3] для произвольных целых $p = n$. При доказательстве использовалась теория цилиндрических функций и методы преобразования контурных интегралов ЗФМ в комплексной плоскости.

Рассмотрим выражение в первой скобке решения (4)

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} [U_3^c(\rho, \varphi - \gamma) + U_3^c(\rho, \varphi + \gamma)]_1 = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{9} \times \exp\left(i \frac{k\pi}{6}\right) \left[\sin\left(\frac{k}{3}(\varphi - \gamma)\right) + \sin\left(\frac{k}{3}(\varphi + \gamma)\right) \right] J_{k/3}(\rho) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{9} \exp\left(i \frac{k\pi}{6}\right) \left[\sin\left(\frac{k}{3}\varphi\right) \cos\left(\frac{k}{3}\gamma\right) \right] J_{k/3}(\rho);$$

во второй скобке

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} [U_3^c(\rho, 3\pi + \varphi - \gamma) + U_3^c(\rho, 3\pi + \varphi + \gamma)]_2 = - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{9} \exp\left(i \frac{k\pi}{6}\right) \left[\sin\left(\frac{k}{3}\varphi\right) \cos\left(\frac{k}{3}\gamma\right) \right] J_{k/3}(\rho).$$

Объединяя выражения, получим

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} U(\rho, \varphi, \gamma) = - \sum_{k=1}^{\infty} [1 + (-1)^k] \frac{k}{9} \exp\left(i \frac{k\pi}{6}\right) \left[\sin\left(\frac{k}{3}\varphi\right) \cos\left(\frac{k}{3}\gamma\right) \right] J_{k/3}(\rho). \quad (7)$$

На верхней грани клина $\varphi = 0$, поэтому обращается в нуль синус в выражении (7). На вертикальной грани клина $\varphi = 3\pi/2$. Вследствие этого

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} U(\rho, \varphi, \gamma) = - \sum_{k=1}^{\infty} [1 + (-1)^k] \frac{k}{9} \exp\left(i \frac{k\pi}{6}\right) \left[\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{k}{3}\gamma\right) \right] J_{k/3}(\rho) = 0.$$

Нечетные слагаемые в сумме обращает в нуль скобка $[1 + (-1)^k] = 0$, четные слагаемые — синус. Таким образом, для решения уравнения Гельмгольца (4) в представлении (6)–(7) выполнены краевые условия (2).

Для определения интенсивности TH волны (3) необходимо найти $\operatorname{Re}U(\rho, \varphi, \gamma)$ и $\operatorname{Im}U(\rho, \varphi, \gamma)$, а также их производные для функции (4) с дифракционным интегралом (5). Опуская подробности аналитических вычислений, выпишем результирующие формулы:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} U = \left[\frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho, \varphi - \gamma) - \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho, \varphi + \gamma) \right] + \left[\frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho, 3\pi + \varphi - \gamma) - \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho, 3\pi + \varphi + \gamma) \right];$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} U = \left[\frac{\partial u}{\partial \theta}(\rho, \varphi - \gamma) - \frac{\partial u}{\partial \theta}(\rho, \varphi + \gamma) \right] + \left[\frac{\partial u}{\partial \theta}(\rho, 3\pi + \varphi - \gamma) - \frac{\partial u}{\partial \theta}(\rho, 3\pi + \varphi + \gamma) \right];$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u = +i \cos \theta u + c_1 \cos\left(\frac{2}{3}\theta\right) H_{1/3}^{(2)}(\rho) + c_2 \cos\left(\frac{1}{3}\theta\right) H_{2/3}^{(2)}(\rho); \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} u = -i\rho \sin \theta u - \frac{2}{3} c_1 \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right) \int_0^\rho \exp(-i(\xi - \rho) \cos \theta) H_{1/3}^{(2)}(\xi) d\xi +$$

$$+ i c_2 \cos\left(\frac{2}{3}\theta\right) \sin \theta \int_0^\rho \exp(-i(\xi - \rho) \cos \theta) H_{2/3}^{(2)}(\xi) \xi d\xi - \quad (9)$$

$$- \frac{1}{3} c_2 \sin\left(\frac{1}{3}\theta\right) \int_0^\rho \exp(-i(\xi - \rho) \cos \theta) H_{2/3}^{(2)}(\xi) d\xi +$$

$$+ i c_2 \cos\left(\frac{1}{3}\theta\right) \sin \theta \int_0^\rho \exp(-i(\xi - \rho) \cos \theta) H_{2/3}^{(2)}(\xi) \xi d\xi;$$

$$c_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right), \quad c_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Математическая модель строгой дифракции на ступеньке волны, обладающей *ТН* поляризацией, описывается формулами (3)–(5), (8)–(9). Блок полуаналитического расчета производных (8), (9) может быть заменен численным определением производных решения (4), (5). Для проведения численного моделирования задачи (3)–(5) привлекались программные пакеты объектного программирования «MathCad» и «Математика». Выбор численных методов и алгоритмов для решения задачи описан в статье [5], там же приведены результаты тестирования вычислительных программ. Представим результаты численного моделирования.

На рис. 2а–в показаны угловые распределения интенсивности *ТН* волны для значений $\rho = 1, 10, 50$; $\gamma = \pi/2 - 0,05$. Угол падения исходной волны здесь близок к вертикальному углу. Особенностью *ТН* волны является то, что амплитуда поля и его интенсивность не обращаются в нуль на поверхностях ступеньки. В области углов $0 < \varphi < \pi - \gamma$ возникает эффект интерференции между падающей и отраженной от верхней грани клина волнами. При падении, близком к вертикальному углу, две волны гасят друг

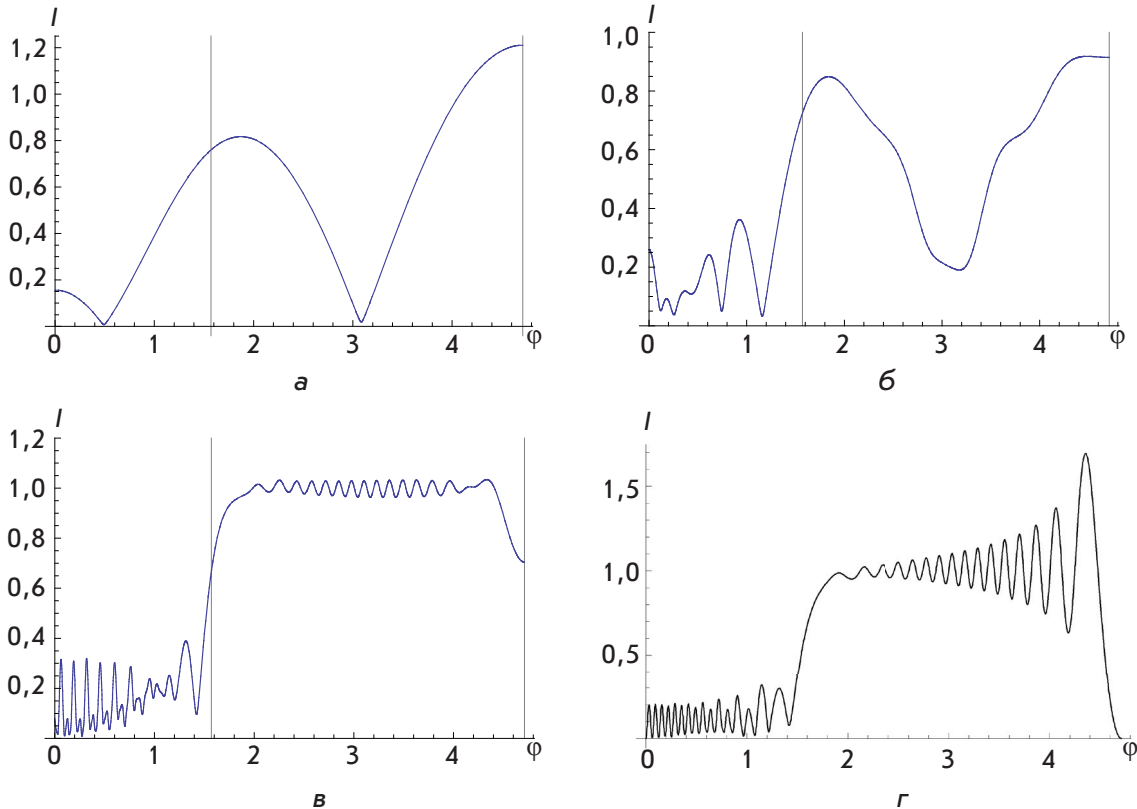


Рис. 2. Угловые распределения интенсивности для волны, обладающей *ТН* поляризацией $\rho = 1$ (а), 10 (б), 50 (в); $\gamma = \pi/2 - 0,05$ и *ТЕ* поляризацией $\rho = 50$, $\gamma = \pi/2 - 0,05$ (г)

друга, что проявляется в малых значениях интенсивности в этой зоне. В области углов $\pi - \gamma < \varphi < \pi + \gamma$ имеется только падающая (она же прошедшая) волна. Эта волна возмущена эффектом дифракции, что проявляется в наличии мелкой волновой структуры (рис. 2в). Эффект дифракции слабо выражен, что связано с малым перепадом поля у вертикальной стенки ступеньки. В области углов $\pi + \gamma < \varphi < 3\pi/2$ формально имеет

место геометрическая тень. Однако данная область углов заполнена диффундировавшим туда полем, что снижает силу эффекта дифракции в рассматриваемом случае.

Действительная и мнимая части комплексной амплитуды магнитного поля TH волны в дальней зоне $\rho = 50$; $\gamma = \pi/2 - 0,05$ вычислены на рис. 3. Представляет интерес сравнить эффекты дифракции для волн с TE и TH поляризациями. Эти отличия иллюстрирует

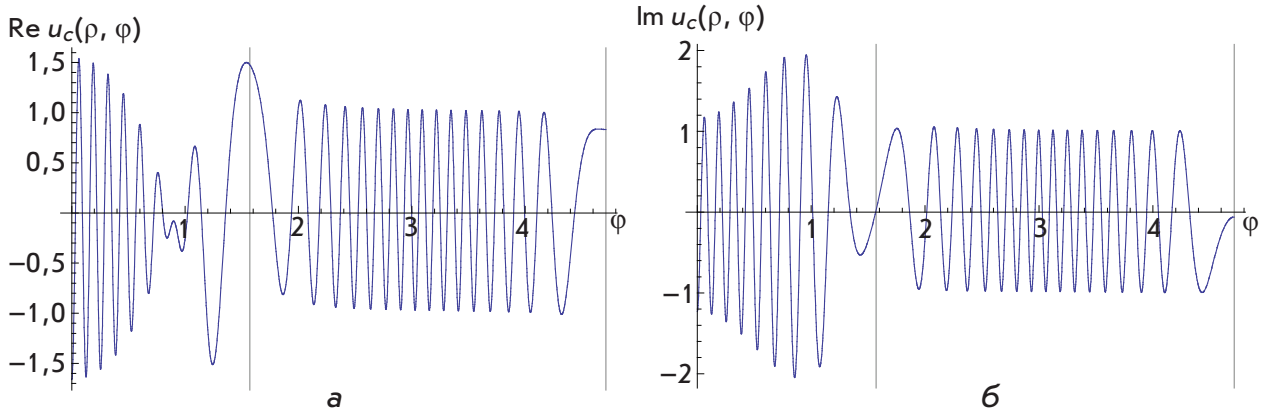


Рис. 3. Угловые распределения амплитуды волны, обладающей TH поляризацией, для $\rho = 50$; $\gamma = \pi/2 - 0,05$: а — ReU ; б — ImU

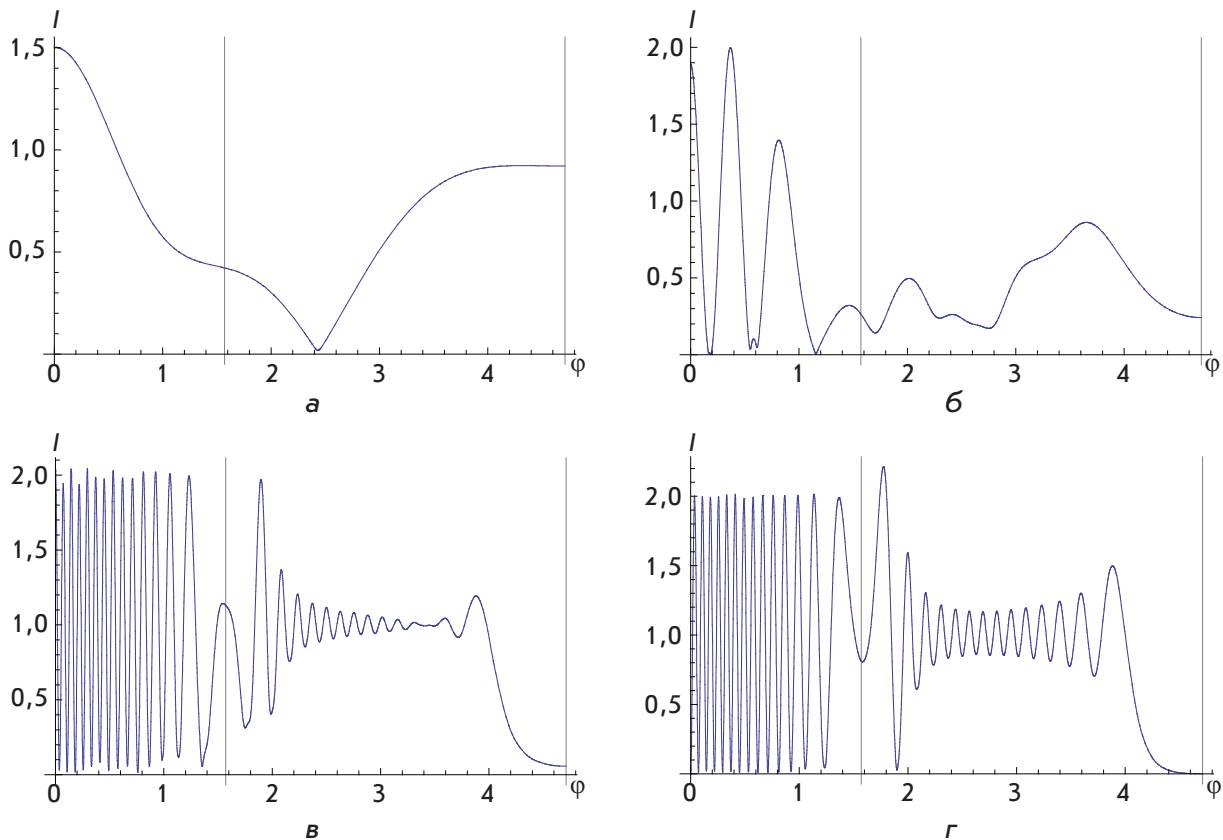


Рис. 4. Угловые распределения интенсивности для волны, обладающей TE поляризацией $\rho = 1$ (а), 10 (б), 50 (в); $\gamma = \pi/3$ и TE поляризацией $\rho = 50$; $\gamma = \pi/3$ (г)

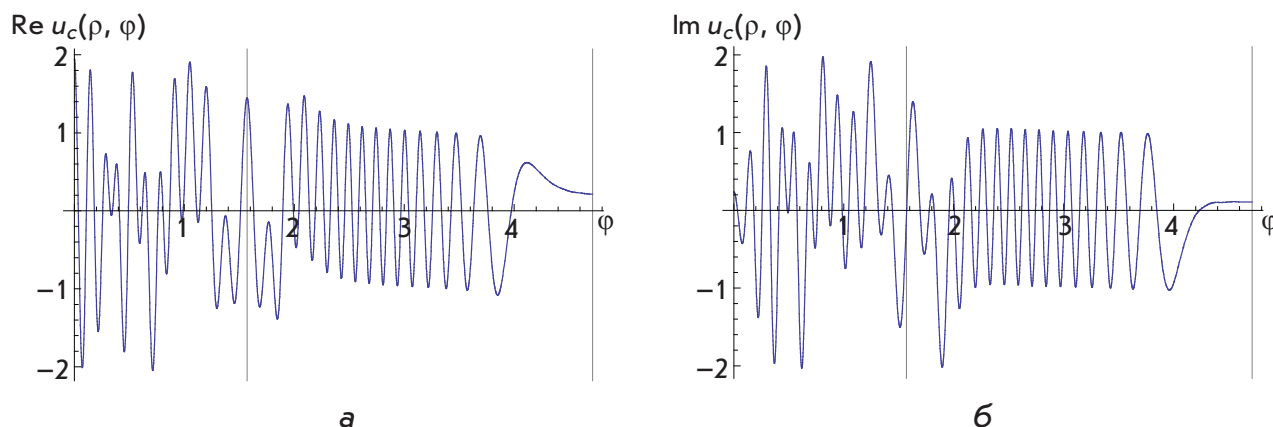


Рис. 5. Угловые распределения амплитуды волны, обладающей TH поляризацией, для $\rho = 50$; $\gamma = \pi/3$: а — ReU ; б — ImU

рис. 2г, на котором представлена дифракция волны TE поляризации для идентичного случая. Как видим, эффекты дифракции для TE и TH волн кардинально различаются. Волна с TH поляризацией менее подвержена дифракции, чем волна с TE поляризацией.

На рис. 4а–в представлена дифракция на ступеньке волны с TH поляризацией, падающей на верхнюю грань ступеньки под меньшим углом, равным $\pi/3$. Граница «свет-тень» в этом случае проходит существенно дальше от вертикальной стенки. Отличия эффектов дифракции для TE и TH волн при этом уменьшаются. Излучение не успевает полностью заполнить область тени. Однако амплитуда колебаний дифракционных максимумов остается больше для волны с TE поляризацией (рис. 4г). Амплитуды в дальней зоне для волны TH поляризации изображены на рис. 5.

На основе численных методов, разработанных в [5], проведено детальное исследование дифракции TH волны на прямоугольном клине. Показано, что также как и в случае дифракции на полуплоскости [4; 6] при дифракции на ступеньке конечный эффект менее ярко выражен для TH волны по сравнению с TE волной. При углах падения исходной плоской волны, близких к вертикальному углу, происходит заполнение области тени вплоть до вертикальной стенки электромагнитным полем, что снижает последующий эффект дифракции и уменьшает глубину модуляции интенсивности для прошедшей TH волны. При уменьшении угла падения (угла Зоммерфельда) отличия в дифракции TH и TE волн уменьшаются, однако амплитуда дифракционных колебаний интенсивности остается меньше у прошедшей TH волны.

Список использованной литературы

1. Борн М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. — М. : Наука, 1973. — 720 с.
2. Боровский А. В. Дифракционный интеграл Франка-Зоммерфельда / А. В. Боровский, А. Н. Бородин. — Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2012. — 64 с.
3. Боровский А. В. Математическая теория дифракции плоской волны на идеально проводящем клине / А. В. Боровский, А. Н. Бородин, А. Л. Галкин. — Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2013. — 112 с. (в печати).
4. Боровский А. В. Численное моделирование дифракции TH волны на идеально проводящей полуплоскости / А. В. Боровский, А. Н. Бородин, А. Л. Галкин // Известия Иркутской государственной экономической академии. — 2012. — № 5 (85). — С. 124–130.
5. Боровский А. В. Численное моделирование строгой математической дифракции на прямоугольном клине / А. В. Боровский, А. Л. Галкин // Известия Иркутской государственной экономической академии (Байкальский государственный университет экономики и права) : электрон. журн. — 2012. — № 6. — URL : <http://eizvestia.isea.ru/reader/article.aspx?id=16220>.
6. Боровский А. В. Численное моделирование эффектов дифракции / А. В. Боровский, А. Н. Бородин, А. Л. Галкин // Известия Иркутской государственной экономической академии (Байкальский государственный университет экономики и права) : электрон. журн. — 2012. — № 4. — URL : <http://eizvestia.isea.ru/reader/article.aspx?id=13859>.
7. Гринберг Г. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений / Г. Гринберг. — М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1948. — 727 с.

8. Зоммерфельд А. Оптика / А. Зоммерфельд. — М. : Иностранная литература, 1953. — 486 с.
9. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции / П. Я. Уфимцев. — М. : Советское радио, 1962. — 244 с.
10. Франк Ф. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики / Ф. Франк, Р. Мизес. — М. ; Л. : ОНТИ, 1937. — 998 с.
11. Kirchhoff G. // Ann.d.physik. — 1883. — № 18. — P. 663.
12. Sommerfeld A. Mathematische Theorie der Diffraction / A. Sommerfeld // Mathematische Annalen. — 1896. — Vol. 47. — P. 317–374.

References

1. Born M. Основы оптики / M. Born, E. Vol'f. — М. : Наука, 1973. — 720 с.
2. Borovskii A. V. Дифракционный интеграл Френеля-Зоммерфельда / A. V. Borovskii, A. N. Borodin. — Иркутск : Изд-во ВГУЭП, 2012. — 64 с.
3. Borovskii A. V. Математическая теория дифракции плоской волны на идеально проводящем клине / A. V. Borovskii, A. N. Borodin, A. L. Galkin. — Иркутск : Изд-во ВГУЭП, 2013. — 112 с. (в печати).
4. Borovskii A. V. Численное моделирование дифракции ТН волны на идеально проводящей полуплоскости / A. V. Borovskii, A. N. Borodin, A. L. Galkin // Известия Иркутской государственной экономической академии. — 2012. — № 5 (85). — С. 124–130.
5. Borovskii A. V. Численное моделирование строгой математической дифракции на прямоугольном клине / A. V. Borovskii, A. L. Galkin // Известия Иркутской государственной экономической академии (Байкальский государственный университет экономики и права) : электрон. журнал. — 2012. — № 6. — URL : <http://eizvestia.isea.ru/reader/article.aspx?id=16220>.
6. Borovskii A. V. Численное моделирование эффектов дифракции / A. V. Borovskii, A. N. Borodin, A. L. Galkin // Известия Иркутской государственной экономической академии (Байкальский государственный университет экономики и права) : электрон. журнал. — 2012. — № 4. — URL : <http://eizvestia.isea.ru/reader/article.aspx?id=13859>.
7. Grinberg G. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений / G. Grinberg. — М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1948. — 727 с.
8. Zommerfeld A. Оптика / A. Zommerfeld. — М. : Иностранная литература, 1953. — 486 с.
9. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции / П. Я. Уфимцев. — М. : Советское радио, 1962. — 244 с.
10. Frank F. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики / F. Frank, R. Mizes. — М. ; Л. : ОНТИ, 1937. — 998 с.
11. Kirchhoff G. // Ann.d.physik. — 1883. — № 18. — P. 663.
12. Sommerfeld A. Mathematische Theorie der Diffraction / A. Sommerfeld // Mathematische Annalen. — 1896. — Vol. 47. — P. 317–374.

Информация об авторах

Боровский Андрей Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра информатики и кибернетики, Байкальский государственный университет экономики и права, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

Галкин Андрей Леонидович — доктор физико-математических наук, заведующий сектором, Институт общей физики РАН им. А.М. Прохорова, 119991, г. Москва, ул. Вавилова, д. 38, e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.

Authors

Borovsky Andrey Victorovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chair of Computer Science and Cybernetics, Baikal State University of Economics and Law, 11, Lenin Street, Irkutsk, 664003, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

Galkin Andrey Leonidovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Sector, General Physics Institute of RAS n.a. A. M. Prokhorov, 38, Vavilov Street, Moscow, 119991, e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.